L'objet de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie sur par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{7}{u_n}\right)$ (‡).

On pourra utiliser sans démonstration le fait que pour tout entier naturel *n*, $u_n > 0$.

1. On désigne par *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{7}{x}\right)$.

Démontrer que la fonction *f* admet un minimum. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n > \sqrt{7}$.

2. a. Soit *n* un entier naturel quelconque. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

b. Pourquoi peut-on en déduire que la suite (u_n) est convergente ?

c. On déduit de la relation (‡) que la limite *L* de cette suite est telle que $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$. Déterminer *L*.

3. Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\frac{\left(u_n - \sqrt{7}\right)}{u_n}$.

4. On définit la suite (d_n) par : $d_0 = 1$ et pour tout entier naturel*n*, $d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n^2$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, $u_n - \sqrt{7} \le d_n$.

b. Voici un algorithme :

Variables	*n* et *p* sont des entiers naturels, *d* est un réel.
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*.
Initialisations	Affecter à *d* la valeur 1. Affecter à *n* la valeur 0.
Traitement	Tant que $d > 10^{-p}$. Affecter à *d* la valeur $0{,}5d^2$ Affecter à *n* la valeur *n* + 1. Fin tant que
Sortie	Afficher *n*.

En entrant la valeur 9, l'algorithme affiche le nombre 5. Quelle inégalité peut-on en déduire pour d_5 ?

Justifier que u_5 est une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-9} près.