EXERCICE 5 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de f est donnée sur le document annexe 2 que l'on complétera et que l'on rendra avec la copie.

Partie A : Étude de certaines propriétés de la courbe $\mathscr{C}$

1. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.
2. Pour tout x de l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 - 1 + \ln(1+x)$.
   Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1\ ;\ +\infty[$.
   Calculer $N(0)$. En déduire les variations de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. Calculer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

Partie B : Étude d'une suite récurrente définie à partir de la fonction f

1. Démontrer que si $x \in [0\ ;\ 4]$, alors $f(x) \in [0\ ;\ 4]$.
2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 4 \text{ et} \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

   a. Sur le graphique de l'annexe 2, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses u_0, u_1, u_2 et u_3.
   b. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0\ ;\ 4]$.
   c. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On désigne par ℓ sa limite.
   e. Utiliser la partie A pour donner la valeur de ℓ.

ANNEXE

À compléter et à rendre avec la copie

Exercice 5