

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.
On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.
On a $u_1 = 2$ et

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif : } u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2 .
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions?
Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.
Justifier votre démarche.

~ ~ ~

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

