Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 1$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) pour différentes valeurs du nombre réel a.

Partie A : étude de la suite (u_n) dans le cas $1 < a < 2$

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - 2 = u_n(u_n - 2)$.
   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = (u_n - 1)(u_n - 2)$.
2. Dans cette question, on pourra utiliser les égalités établies dans la question précédente.
   a. En utilisant un raisonnement par récurrence démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n < 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction u écrite en langage Python.
   Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?
   On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.
   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.
2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).