On considère la fonction $f$ définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que $f$ est deux fois dérivable sur $]0~;~+\infty[$.
On note $f'$ la fonction dérivée de la fonction $f$ et $f''$ la fonction dérivée de la fonction $f'$.

**Partie A :** Étude de la fonction $f$

1. Déterminer les limites de la fonction $f$ en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel $x$ strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel $x$ strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction $f'$ sur $]0~;~+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction $f'$ sur $]0~;~+\infty[$.

   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction $f'$ sur $]0~;~+\infty[$.

   Les limites de la fonction $f'$ aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
5. Montrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $]0~;~+\infty[$.

**Partie B :** Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction $g$ définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction $g$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$, on note $g'$ sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction $g$.

   Les limites de la fonction $g$ aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.

   Résoudre, sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

**Partie C :** Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel $n$,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite $(u_n)$ converge.

   On appelle $\ell$ la limite de la suite $(u_n)$ et on admet que $\ell$ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.

3. Déterminer la valeur de $\ell$.