

On considère la fonction f définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $] -1,5 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en $-1,5$.
On admet que la limite de la fonction g en $+\infty$ est $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g sur $] -1,5 ; +\infty[$.
3.
 - a. Démontrer que, dans l'intervalle $] -0,5 ; +\infty[$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α .
 - b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : Étude de la suite (u_n)

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $] -1,5 ; +\infty[$.

1. Soit x un nombre réel. Montrer que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$.
2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge.