

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par

$$f(x) = \frac{2+3x}{4+x}.$$

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet que cette suite est bien définie.

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 4]$.
3. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 3.$$

4.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
 - b. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) ; montrer l'égalité :

$$\ell = \frac{2+3\ell}{4+\ell}$$

- c. Déterminer la valeur de la limite ℓ .

Partie B

On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = f(v_n).$$

1. On donne en **Annexe, à rendre avec la copie**, la courbe représentative, \mathcal{C}_f , de la fonction f et la droite D d'équation $y = x$.
Placer sur l'axe des abscisses par construction géométrique les termes v_1 , v_2 et v_3 sur l'**annexe, à rendre avec la copie**.
Quelle conjecture peut-on formuler sur le sens de variation et le comportement de la suite (v_n) quand n tend vers l'infini?

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n ,

$$1 - v_{n+1} = \left(\frac{2}{4 + v_n} \right) (1 - v_n).$$

- b. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq 1 - v_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

3. La suite (v_n) converge-t-elle? Si oui, préciser sa limite.

