Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n).

Partie A :

On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un tableur.
On a reproduit ci-dessous une partie d'une feuille de calcul, où figurent les valeurs de u_0 et de u_1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	6
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	

1. Donner une formule qui, saisie dans la cellule B4, puis recopiée vers le bas, permet d'obtenir des valeurs de la suite (u_n) dans la colonne B.
2. Recopier et compléter le tableau ci-dessus. On donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près de u_n pour n allant de 2 à 5.
3. Que peut-on conjecturer à propos de la convergence de la suite (u_n) ?

Partie B : Étude de la suite

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

1. **a.** Démontrer que (v_n) est une suite constante.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

2. **a.** En utilisant le résultat de la question **1. b.**, montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < u_{n+1} < 15$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. **a.** Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. Calculer la limite de la suite (u_n).