

EXERCICE 2. Étude d'une somme infinie

(6 points)

On définit pour tout entier  $n \geq 1$  la somme  $s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

- ① Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \sqrt{n}$  pour tout entier  $n \geq 1$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - (b) Montrer que la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée.
  - (c) En déduire la limite de  $(u_n)$ .
- ② Soit  $n \geq 1$ . Combien la somme  $s_n$  a-t-elle de termes ? Quel est le plus petit d'entre eux ?
- ③ En déduire que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $s_n \geq \sqrt{n}$ .
- ④ Déduire de ce qui précède  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ . Donner également le sens de variation de  $(s_n)$ .

$n \rightarrow +\infty$

EXERCICE 3. Datation au carbone 14

(4 points)

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison  $q \in ]0; 1[$  et de premier terme  $u_0 > 0$ .

- ① Quel est le sens de variation de  $(u_n)$  ? Quelle est sa limite ?  
Donner une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- ② Quel est le résultat affiché par l'algorithme ci-contre pour un choix de  $Q = 0,5$  et  $P = 0,06$  ?
- ③ Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de raison 0,999 88. Comment choisir  $Q$  et  $P$  pour que le programme affiche le rang du premier terme de la suite au moins inférieur de moitié au terme  $u_0$  ? (on admettra que le résultat est 5 776)

```

Saisir Q,P
Affecter 1 à U
Affecter 0 à N
Tant que U > P :
    Affecter Q × U à U
    Affecter N + 1 à N
Fin Tant que
Afficher N
  
```

- ④ La quantité de carbone 14 présente dans un organisme baisse d'environ 0,012% chaque année. On note  $n$  le nombre d'années écoulées depuis la mort d'un organisme et  $u_n$  la quantité de carbone 14 restante  $n$  années après sa mort. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et déduire de ③ la période de demi-vie du carbone 14 (le nombre d'années après la mort d'un organisme à partir duquel la quantité de carbone 14 a diminué de moitié).
- ⑤ On a trouvé des ossements qui contiennent 6% de la quantité de carbone 14 contenue dans un être vivant. À partir de ② et ④, estimer l'âge des ossements à 3 000 ans près.