

EXERCICE 3.

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 3}{2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

La suite (S_n) est définie par $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = \sum_{k=0}^n u_k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- ① Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
- ② En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- ③ Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n - 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
 - (b) En déduire : $u_n = -\frac{3}{2^n} + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ④ (a) Déterminer le sens de variations de la suite (S_n) .
 - (b) Cours. Démontrer que pour $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
 - (c) En déduire une expression de S_n en fonction de n .
- ⑤ Dans cette question, toute trace de recherche, même partielle, sera évaluée.
Soient une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $s_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.
Dire, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :
« les suites (x_n) et (s_n) ont le même sens de variation. »

EXERCICE 1. Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$ (10 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$ pour tout entier naturel non nul n .

- ① Calculer les termes u_2 , u_3 et u_4 .
- ② (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $u_n > 0$.
 - (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - (c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ .
 - (d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n}$. En déduire que $\ell = \frac{1}{2}\ell$ puis la valeur de ℓ .
- ③ On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{u_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique, préciser son premier terme et sa raison.
 - (b) En déduire que $u_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout entier $n \geq 1$.
- ④ Conclure à la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$.