Exercice 2 (d'après bac S, Antilles-Guyane 2005, 12 points)

1. Restitution organisée de connaissances
   Soit a un réel positif. On rappelle que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geq 1+na$.
   a) En déduire la limite de q^n quand $\to +\infty$, pour $q > 1$.
   b) En déduire la limite de q^n quand $\to +\infty$, pour $0 < q < 1$.
2. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1$. Calculer u_1, u_2, u_3.
3. Compléter l'algorithme suivant (les trois lignes en gras), qui lit un entier n, calcule et affiche la valeur de u_n ainsi que la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$:

   Variables : k, u, S, n de type nombre
   Début algorithme
   Lire n
   u prend la valeur1
   S prend la valeur 1
   Pour k allant de
   Début pour
   u prend la valeur
   S prend la valeur
   Fin pour
   Afficher u
   Afficher S
   Fin algorithme

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, $u_n \geq 0$. En déduire que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq n - 2$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = 4u_n - 8n + 24$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
6. En déduire que, pour tout n, $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6$. Retrouver la limite de u_n.
7. Donner l'expression de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n.