EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

On définit, pour tout entier naturel $n > 0$, la suite (u_n) de nombres réels strictement positifs par $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.

1. Pour tout entier naturel $n > 0$, on pose $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

   a. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, $v_n > \dfrac{1}{2}$.

   c. Trouver le plus petit entier N tel que si $n \geqslant N$, $v_n < \dfrac{3}{4}$.

   d. En déduire que si $n \geqslant N$, alors $u_{n+1} < \dfrac{3}{4} u_n$.

   On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n = u_5 + u_6 + \cdots + u_n$.

2. On se propose de montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 5}$ est convergente.

   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

   $$u_n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} u_5.$$

   b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$,

   $$S_n \leqslant \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdot + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] u_5.$$

   c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $S_n \leqslant 4u_5$.

3. Montrer que la suite $(S_n)_{n \geqslant 5}$ est croissante et en déduire qu'elle converge.