1. Exercice 4

7 points

Le but de l'exercice est demontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$, admet une unique solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

I. Existence et unicité de la solution

On note *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démonter que *x* est solution de l' équation (E) si et seulement si *f* (*x*) = 0.

2. Étude du signe de la fonction *f.*

a. Etudier le sens de variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α.

c. Démontrer que α appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$.

d. Étudier le signe de *f* sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

II. Deuxième approche

On note *g* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation *f* (*x*) = 0 est équivalente à l'équation *g* (*x*) = *x*.

2. En déduire que α est l'unique réel vérifiant : $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction *g* est croissante sur l'intervalle $[0\,;\alpha]$.

III. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considére la suite (u_n) définie par : u_0 = 0 et, pour tout entier naturel *n*, par : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n* : $0 \le u_n \le u_{n+1} \le \alpha$.

2. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note *l* sa limite.

3. Justifier l'égalité : $g(l) = l$. En déduire la valeur de *l*.

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.