

EXERCICE 2 7 points

Principaux domaines abordés : suites; fonctions, fonction exponentielle.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 e^x.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Calculer u_1 puis u_2 .

On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3} .

- b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python,
« `i in range (n)` » signifie que
`i` varie de 0 à `n - 1`.

```
def fonc (n) :
    u = - 1
    for i in range(n) :
        u=u**3*exp(u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3} .

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x+3)$.
b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0	$-27e^{-3}$	$+\infty$

- c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0.$$

- d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- e. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).