

EXERCICE 2 SUITES

7 points

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2$.

1.
 - a. Calculer u_1 et u_2 .
 - b. Recopier et compléter la fonction ci-dessous écrite en langage Python. Cette fonction est nommée *suite_u* et prend pour paramètre l'entier naturel p . Elle renvoie la valeur du terme de rang p de la suite (u_n) .

```
def suite_u(p) :  
    u= ...  
    for i in range(1,...) :  
        u =...  
    return u
```

2.
 - a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq 4$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3.
 - a. Justifier que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie l'égalité $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$.
 - b. En déduire la valeur de ℓ .
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
 - b. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 2.
 - c. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de w_n en fonction de n et montrer que $v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \times 2^n + \ln(5)$.
5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.