

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

où \ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.
 - b. Justifier le tableau de signes suivant, donnant le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

x	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -

- c. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
3. Soit k un nombre réel positif ou nul.
 - a. Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; e]$.
 - b. Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^{\frac{x}{4}}.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
 $u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}}$ c'est-à-dire : $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Justifier que la fonction g est croissante sur \mathbb{R} .
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \leq u_{n+1} \leq e$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que f est solution de l'équation :

$$e^{\frac{x}{4}} = x.$$

4. En déduire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
5. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite ℓ de la suite (u_n) .