

Principaux domaines abordés : Suites ; Fonctions, Fonction exponentielle.**Partie A**

On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 1 + x - e^{0,5x-2}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
 - b. Démontrer que, pour tout réel x non nul, $f(x) = 1 + 0,5x \left(2 - \frac{e^{0,5x}}{0,5x} \times e^{-2} \right)$.
En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
2.
 - a. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x .
 - b. Démontrer que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) < 0$ est l'intervalle $]4 + 2\ln(2) ; +\infty[$.
3. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On fera figurer la valeur exacte de l'image de $4 + 2\ln(2)$ par f .
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-1 ; 0]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie à la partie A.

1.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- b. En déduire que la suite (u_n) converge. On notera ℓ la limite.
2.
 - a. On rappelle que f vérifie la relation $\ell = f(\ell)$.
Démontrer que $\ell = 4$.
 - b.

On considère la fonction `valeur` écrite ci-contre dans le langage Python :

```
def valeur (a) :  
    u = 0  
    n = 0  
    while u <= a :  
        u = 1 + u - exp(0.5*u - 2)  
        n = n+1  
    return n
```

L'instruction `valeur(3.99)` renvoie la valeur 12.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.