

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.

On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.
2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ .
 - a. En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
 - b. Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.
3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.
 - a. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.
 - b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $1 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
 - c. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.
 - a. À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 - b. En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
 - c. L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
Recopier et compléter cet algorithme.
 P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U .....

Tant que ...
    P ← .....
    U ← .....
Fin Tant que
```