

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{cases}$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C?
2. Quelle conjecture peut-on émettre?

Partie B

1. On définit la suite (u_n) , pour tout entier naturel n , par $u_n = a_n - c_n$.
 - a. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
 - b. Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_n en fonction de n .
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n .
 - a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
3. En déduire que pour tout entier naturel n , on a :
$$a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{7} \left(-\frac{1}{6} \right)^n, \quad b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{6} \right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n + \frac{2}{7} \left(-\frac{1}{6} \right)^n.$$
4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes?