

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1. Calculer d_1 et a_1 .
2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.

L'algorithme suivant est proposé :

<i>Variables :</i>	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
<i>Initialisation :</i>	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n
<i>Traitement :</i>	Pour k variant de 1 à n D prend la valeur $\frac{D}{2} + 100$ A prend la valeur $\frac{A}{2} + \frac{D}{2} + 70$ Fin pour
<i>Sortie :</i>	Afficher D Afficher A

- a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question 1. ?
 - b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.
3. a. Pour tout entier naturel n , on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.
 - b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n .
 - c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.
4. On admet que pour tout entier naturel n ,

$$a_n = 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n + 110 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

- a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.
- b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.
- c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,
 $0 \leq 100n \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$.
- d. Étudier la convergence de la suite (a_n) .