TS RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Propriété

Soit P(n) une proposition dépendant d'un entier n et n_0 un entier fixé.
Si P(n_0) est vraie (Initialisation)
et si pour tout entier $n \geqslant n_0$ P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) (hérédité),
alors P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Remarque

Cette propriété, que l'on ne démontre pas et qui semble tenir du "bon sens" est en fait un axiome des mathématiques, c'est-à-dire un énoncé posé à priori qui sera une des bases de la théorie mathématique.
En géométrie un axiome célèbre est l'axiome d'Euclide : "Par un point donné il passe une parallèle et une seule à une droite donnée".

Exemple

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $2^n \geqslant n + 1$.
Soit P(n) la proposition : « 2^n est supérieur ou égal à $n + 1$ »
Initialisation :
pour $n = 0$, on a $2^n = 2^0 = 1$ et $n + 1 = 0 + 1 = 1$, donc la proposition P(n) est vraie pour $n = 0$.
(On pourrait vérifier sans difficulté la proposition P(n) pour $n = 1, 2, 3...$ cela peut être utile pour la compréhension, mais c'est sans utilité pour le raisonnement)
Hérédité :
Supposons que la proposition P(n) est vraie pour un entier naturel fixé n.
On a donc $2^n \geqslant n + 1$.
On veut alors démontrer que P(n+1) est vraie c'est-à-dire que $2^{n+1} \geqslant (n + 1) + 1$ c'est-à-dire $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant 0$
Sachant que $2^n \geqslant n + 1$, on peut multiplier chacun des membres par 2 (nombre réel positif).
On obtient $2 \times 2^n \geqslant 2(n + 1)$ c'est-à-dire $2^{n+1} \geqslant 2n + 2$
Alors $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant 2n + 2 - (n + 2)$ (en enlevant (n+2) aux deux membres)
donc $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant n$
Comme n est un entier naturel donc positif ou nul, on a $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant n \geqslant 0$
On a donc obtenu $2^{n+1} - (n + 2) \geqslant 0$ donc $2^{n+1} \geqslant (n + 1) + 1$
La proposition P(n+1) est alors vérifiée.

On a donc justifié que P(0) est vraie (initialisation)
et que pour tout entier $n \geqslant 0$ P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) (hérédité)
On a donc démontré par récurrence que la proposition P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
c'est-à-dire que $2^n \geqslant n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exercice 01

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme des entiers de 1 à n est égale à $\dfrac{n(n + 1)}{2}$

c'est-à-dire $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

Exercice 02

Soit x un réel différent de 1.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Exercice 03

On considère la proposition P(n) : $2^n \geqslant n^2$.
1°)Cette proposition est-elle vraie pour les entiers 0, 1, 2, 3, 4 , 5 ?
2°)Démontrer que la proposition P(n) est vraie pour tout entier naturel n différent de 3