PROBLÈME **11 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x).$$

1. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   Pour l'étude de la limite en -1, on remarquera que

$$f(x) = \frac{2x-(1+x)\ln(1+x)}{1+x}$$

2. Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, dans l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ une solution unique notée α. Vérifier qu'une valeur décimale approchée de α à 10^{-1} près est $3{,}9$.
4. Préciser, suivant les valeurs de x, le signe de $f(x)$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(0) & = & 0 \\ g(t) & = & \dfrac{\ln(1+t)}{\sqrt{t}} \quad \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que g est continue sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. Étudier la dérivabilité de g en 0.
2. Montrer que pour tout réel t strictement positif, on a :

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} f(t).$$

3. **a.** Calculer la limite de g en $+\infty$. On remarquera que pour $t > 0$:

$$\ln(1+t) = \ln t + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

b. Dresser le tableau des variations de g.

4. Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On prendra pour unités : 1 cm sur l'axe $\left(O, \vec{\imath}\right)$ et 10 cm sur l'axe $\left(O, \vec{\jmath}\right)$.
Construire la courbe (Γ) représentative de g.

Partie C

Cette partie a pour objectif de déterminer l'aire $\mathscr{A}$, en unités d'aire, du domaine plan limité par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et la droite d'équation $x = 1$.

1. **a.** Démontrer que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g_1(x) = \sqrt{x}\ln(1+x)$$

est dérivable en 0.

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\varphi(x) = 2\sqrt{x}\ln(1+x) - \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est dérivable en tout point de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que $\varphi'(x) = g(x)$.

2. En déduire que : $\mathscr{A} = 2\ln 2 - \int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Calcul de l'intégrale $\int_0^1 \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \int_0^x \frac{2\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

et k la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I} = \left[0\,;\,+\frac{\Pi}{2}\right[$ par $k(\theta) = \tan^2\theta$.

1. Calculer $(h \circ k)(0)$.
2. Prouver que, pour tout θ appartenant à I, $(h \circ k)'(0) = 4\tan^2\theta$.
3. En écrivant $\tan^2\theta$ sous la forme $(\tan^2\theta + 1) - 1$, déterminer une primitive de $(h \circ k)'$ puis donner l'expression de $(h \circ k)$.
4. Calculer $h(\mathrm{I})$.

Déduire des résultats précédents la valeur exacte de $\mathscr{A}$.