**PROBLÈME** **11 points**

**Partie A**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathrm{I} = ]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'origine O et d'unité graphique 5 cm.

1. Étudier les variations de la fonction $f$ et déterminer ses limites aux bornes de I. En déduire que $\mathscr{C}$ admet une droite asymptote $\Delta$ que l'on précisera.
2. **a.** Écrire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point $M$ de $\mathscr{C}$, d'abscisse $a$. On note $T_a$ cette tangente.

   **b.** Montrer qu'il existe deux valeurs de $a$ pour lesquelles la droite $T_a$ passe par l'origine O.
3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On mettra en évidence la droite $\Delta$ et les deux tangentes trouvées ci-dessus.
4. On pose, pour $x \in \mathrm{I}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   La fonction $F$ est-elle monotone ? Est-elle positive ?

**Partie B**

On pose $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

L'objet de cette partie est d'encadrer l'intégrale $J$. On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de $J$.

1. En utilisant l'étude de la fonction $f$ réalisée dans la partie A, montrer que $1 \leqslant J \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2}$.
2. On pose, pour tout entier naturel $n$, $u_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 t^n \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

   **a.** Calculer $u_0$.

   **b.** Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que
   $u_{n+1} = (-1)^{n+1}\mathrm{e} + (n+1)u_n$.

   **c.** Calculer alors successivement $u_1, u_2, \ldots, u_6$. On donnera les réponses sous la forme $a\mathrm{e} - b$ avec $a$ et $b$ entiers naturels.
3. **a.** Montrer que :

$$u_0 + u_1 + + u_n = \int_0^1 \mathrm{e}^t \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}.$$

**b.** En déduire que :

$$J = u_0 + u_1 + \ldots + R_n, \quad \text{avec } R_n = (-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

**c.** Prouver que :

$$\frac{1}{n+2} \leqslant |R_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2(n+2)}$$

**4.** **a.** Trouver le plus petit $n$ entier tel que $\dfrac{\mathrm{e}}{2(n+2)} - \dfrac{1}{n+2} < 0,05$.

**b.** Calculer $S6 = u_0 + u_1 + \cdots + u_6$ sous la forme $a\mathrm{e} - b$ avec $a$ et $b$ entiers naturels.

**c.** Prouver que $S_6 - \dfrac{\mathrm{e}}{16} \leqslant J \leqslant S_6 - \dfrac{1}{8}$.

**d.** Déduire de ce qui précède un encadrement de $J$, d'amplitude inférieure à 0,05. par deux nombres décimaux.