PROBLÈME **12 points**

Partie 1

On désigne par g la fonction numérique définie sur $[0\,;\,\pi]$ par

$$g(x) = x\cos x - \sin x.$$

Étudier g et dresser son tableau de variation. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,\pi]$.

Partie 2

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f(x) & = & \dfrac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \in]0\,;\,\pi] \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue sur $[0\,;\,\pi]$.
2. Étudier les variations de f sur $]0\,;\,\pi]$.
   Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;\,\pi]$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
   (On admettra que le nombre dérivé de f en zéro est zéro.)
3. En déduire que pour x de $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ on a $\dfrac{2}{\pi} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Partie 3

On se propose d'étudier la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par :

$$F(x) = \int_x^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(On ne cherchera pas à calculer une primitive de f.)

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. **a.** En utilisant la question II. 3., démontrer que pour $0 < x \leqslant \pi$, on a :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2x}{\pi^2} \leqslant \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right) 2\,\mathrm{d}t.$$

b. Calculer la valeur en π des fonctions définies sur $]0\,;\,\pi]$ respectivement par :

$$x \longmapsto \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad x \longmapsto \int_x^{\pi} \frac{2}{u^2} \sin^2 \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u,$$

puis calculer leur fonction dérivée.
En déduire l'égalité des deux fonctions.

c. Déduire de 2. a. et b. que :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{2x}{\pi^2} \leqslant \int_x^{\pi} \frac{2}{u^2} \sin^2 \frac{u}{2}\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

3. **a.** En prenant $t \longmapsto 1 - \cos t$ comme primitive de $t \longmapsto \sin t$ et en intégrant par parties, démontrer que pour tout x de $]0\,;\,\pi]$:

$$\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} + \frac{\cos x - 1}{x} + \int_x^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. Calculer la limite de $\dfrac{\cos x - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0.

c. Démontrer que :

$$\int_x^{\pi} \frac{1 - \cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^{\pi} \frac{2}{t^2} \sin^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

d. En déduire que :

$$\frac{4}{\pi} - \frac{2x}{\pi^2} + \frac{\cos x - 1}{x} \leqslant \int_x^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} + \frac{\cos x - 1}{x}.$$

e. En déduire que :

$$\frac{4}{\pi} \leqslant \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}.$$

4. **a.** Dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;\,\pi]$.

b. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction F dans un plan rapporté à un repère orthonormé.