

PROBLÈME**12 points**

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur \mathbb{R} par

$$f_n(x) = xe^x - nx.$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A. Soit la fonction g_n définie sur \mathbb{R} par $g_n(x) = (1+x)e^x - n$.

1. Calculer la dérivée de g_n faire le tableau de variation de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n et que α_n est positif ou nul. Que vaut α_1 ?
3. Montrer que $\alpha_n = \ln \frac{n}{1+\alpha_n}$ et que $0 \leq \alpha_n \leq \ln n$.
4.
 - a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \leq x - 1$ (1).
 - b. En utilisant (1), déterminer le signe de $g_n(\ln \sqrt{n})$.
 - c. En déduire que : $\frac{1}{2} \ln n \leq \alpha_n$.Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

R

PARTIE B

i.

1. Calculer la dérivée de f_n , faire le tableau de variations de f_n et déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.

Montrer que $f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1 + \alpha_n}$.

2. Montrer que \mathcal{C}_n a une asymptote D_n que l'on déterminera. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_n et D_n .
3. Déterminer les points d'intersection de \mathcal{C}_n et de l'axe des abscisses, et préciser la position de \mathcal{C}_n par rapport à cet axe.
4. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_{n+1} .
5.
 - a. Montrer que $0,35 \leq \alpha_2 \leq 0,40$.
Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès, de α_2 .
En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.
 - b. Tracez \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sur le même graphique en mettant en évidence les résultats précédents (on choisira comme unité 10 cm sur les deux axes). On précisera les tangentes en O à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
 - c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine borné limité par \mathcal{C}_2 et l'axe des abscisses (on pourra utiliser une intégration par parties).