

PROBLÈME

11 points

A- Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] - 1 ; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right).$$

1. **a.** Étudier la parité de f et calculer ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.
- b.** Étudier les variations de la fonction f et tracer sa courbe représentative (\mathcal{C}) dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 5 cm).
2. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan compris entre la courbe (\mathcal{C}) l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.
On pourra faire une intégration par parties.

3. Pour tout réel $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, on pose :

$$g(x) = f(\sin x).$$

Montrer que la fonction g est une primitive sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ de la fonction h telle que $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

B- Dans la suite du problème, a désigne un nombre réel de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$.
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} dt.$$

1. Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.
2. En déduire le limite de $I_n(a)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

C- Pour tout entier n entier supérieur ou égal à 1, on définit sur $[0 ; a]$ la fonction F_n par :

$$F_n(t) = \sin t + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{\sin^5 t}{5} + \cdots + \frac{\sin^{2n-1} t}{2n-1}.$$

1. Montrer que F_n est dérivable sur $[0 ; a]$ et que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; a]$:

$$F'_n(t) = \frac{1 - \sin^{2n} t}{\cos t}.$$

Calculer $F_n(0)$.

2. En intégrant le relation précédente entre 0 et a , montrer que :

$$F_n(a) = g(a) - I_n(a).$$

En déduire la limite de $F_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On considère alors la suite u définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \frac{1}{5 \times 2^5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \times 2^{2n-1}}.$$

- a. Montrer, en utilisant C b. et B 1., que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_n est une valeur approchée de $\ln \sqrt{3}$ à $\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ près par défaut.
- b. En déduire, sous forme de fraction irréductible, une valeur approchée de $\ln \sqrt{3}$ à 10^{-2} près par défaut.