PROBLÈME **12 points**

L'objet du problème est l'étude d'une famille de fonctions.
Pour n **entier naturel non nul**, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonctionn numérique f_n par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n(2\ln x - 1) & \text{si} \quad x \in]0\ ;\ +\infty[\\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (l'unité graphique est 4 cm).

A. Dans toute cette partie, $n = 1$

1. **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Étudier le sens de variation de f_1.
   c. Étudier la limite de f_1 en $+\infty$.
   d. Préciser la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point O.
2. Soit le point M_0 d'abscisse x_0 strictement positive de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
   a. Montrer que la tangente en M_0 à $(\mathscr{C}_1)$ coupe l'axe des ordonnées en un point T_0 dont on donnera les coordonnées.
   b. En déduire une construction simple de la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ au point M_0.
3. On désigne par A le point de $(\mathscr{C}_1)$ d'ordonnée nulle, autre que O.
   Tracer la tangente en A à $(\mathscr{C}_1)$ puis la courbe $(\mathscr{C}_1)$.
4. Soit α un réel de l'intervalle $]0\ ;\ \text{e}]$; à l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_\alpha^{\text{e}} t \ln t \, \text{d}t$.
5. **a.** Étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ et de la droite (Δ) d'équation $x - y = 0$. On précisera les points d'intersection.
   b. Calculer, en cm^2, l'aire $S(\alpha)$ de la portion de plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C}_1)$, la droite (Δ) et la droite d'équation $x = \alpha$.
   c. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0} S(\alpha)$.

Dans cette partie on étudie f_n pour $n \geqslant 2$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Déterminer la fonction dérivée f_n'.
3. On désigne par x_n la valeur, autre que 0, pour laquelle f_n' s'annule.
   a. Montrer que pour tout entier n ($n \geqslant 2$), on a : $1 \leqslant x_n < \sqrt{\mathrm{e}}$.
   b. Étudier la variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
   c. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge et trouver sa limite.
4. a. Étudier la limite de f_n en $+\infty$.
   b. Dresser pour $n \geqslant 2$, le tableau de variation de f_n ; en déduire que pour $n \geqslant 2$, $f_n(x) \leqslant -1$.
   c. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n)$.
5. Pour tout entier naturel non nul n, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction g_n par :

$$g_n(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

   Étudier le signe de $g_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$.
6. Tracer soigneusement la courbe $(\mathscr{C}_2)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ en mentionnant sa tangente en O.