**PROBLÈME** **12 points**

À tout entier naturel $n \geqslant 1$ on associe la fonction numérique $f_n$ définie sur l'intervalle I = [1 ; $+\infty$[ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de $f_n$ dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan. (Choisir comme unités graphiques 1 cm sur $x'x$ et 10 cm sur $y'y$.)
La première partie propose l'étude de $f_1$ Dans les parties II et III on précise certains comportements des fonctions $f_n$ et des primitives de ces fonctions.

**I. Étude de $f_1$**

1. Déterminer la limite de $f_1$ en $+\infty$.
   Étudier les variations de $f_1$.
2. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 1 puis tracer la courbe $\mathscr{C}_1$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour $x$ élément de I :

$$I_1(x) = \int_1^x f_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

**II. Comportement des fonctions $f_n$ pour $n \geqslant 1$**

1. En remarquant que $\dfrac{(\ln x)^n}{x^2} = \left[\dfrac{(\ln x)}{x^{2/n}}\right]^n$, déterminer la limite de $f_n$ en $+\infty$.
2. **a.** Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'\left(\mathrm{e}^{n/2}\right) = 0$.
   Donner le tableau de variations de $f_n'$.
   **b.** Vérifier que la valeur maximale de $f_n$ sur I est :

$$y_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2\mathrm{e}}\right)^n.$$

3. **a.** Soit $x \in$ I.
   Étudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.
   **b.** Déterminer la tangente à $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 1.
   Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
4. On se propose d'étudier la suite $\left(y_n\right)_{n\geqslant 1}$.
   Soit $n$ un entier strictement positif.

**a.** Calculer, pour $x \geqslant 1$, $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$.

**b.** Montrer que $y_{n+1} = \dfrac{1}{2} f_n\left(\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\right)$ et que $y_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} y_n$.

**c.** En déduire que $y_n \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}} \dfrac{1}{2^n}$.
Quelle est la limite de la suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$ ?

**III. Étude de primitives de $f_n$ sur I**

À tout entier $n \geqslant 1$ et à tout nombre réel $x$ de I, on associe l'intégrale

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

**1.** **a.** Soit $k \geqslant 1$ un entier.
Grâce à une intégration par parties démontrer la relation :

$$I_{k+1}(x) = I_k(x) - \frac{1}{(k+1)!} \frac{(\ln x)^{k+1}}{x}.$$

**b.** En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$I_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{2!x} - \cdots - \frac{(\ln x)^{n-1}}{(n-1)!x} - \frac{(\ln x)^n}{n!x}$$

**2.** Soit $\alpha \geqslant 1$ un nombre réel fixé.

**a.** Montrer que $0 \leqslant I_n(\alpha) \leqslant (\alpha - 1) y_n$ ($y_n$ a été défini dans II. 2. b).

**b.** En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(\alpha)$. (On utilisera II. 4. c.).

**3.** Pour $n \geqslant 1$ et $x \geqslant 1$ on pose :

$$W_n(x) = 1 + \frac{\ln x}{1!} + \frac{(\ln x)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\ln x)^n}{n!}$$

**a.** Exprimer $W_n(x)$ en fonction de $I_n(x)$.

**b.** $\alpha \geqslant 1$ étant un nombre réel fixé, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n(\alpha)$.

**c.** En déduire la limite $\gamma$ de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

En s'aidant de la calculatrice donner une valeur décimale approchée de $U_6$ à $10^{-4}$ près. Comparer cette valeur à $\gamma$.