A

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et } f(0) = 0.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$, (unité graphique : 4 cm.)

1. **Variations de f**
   - **a.** Calculer la dérivée f' de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   - **b.** Déterminer la limite de $(1+u)\mathrm{e}^{-u}$ lorsque u tend vers $+\infty$. En déduire que f est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.
   - **c.** Étudier le sens de variation de f.
   - **d.** Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
2. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   Soit φ la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :
   $$\varphi(u) = 1 - (1+u)\mathrm{e}^{-u}.$$
   - **a.** Calculer la dérivée de φ.
   - **b.** Prouver que, pour tout $u \geqslant 0$:
   $$0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant u.$$
   - **c.** En déduire que, pour tout $u \geqslant 0$
   $$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \frac{u^2}{2} \quad (1)$$
3. **Étude de f au voisinage de $+\infty$**
   - **a.** À l'aide de (1), établir que, pour tout $x > 0$:
   $$0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{1}{2x}.$$
   - **b.** En déduire que $\mathscr{C}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$; préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.
4. **Étude de la tangente à $\mathscr{C}$ en un point**
   Soient x un élément de $[0\ ;\ +\infty[$ et T_x la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse x.
   - **a.** Déterminer une équation cartésienne de T_x.
   - **b.** Montrer que T_x coupe l'axe des abscisses $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\right)$ au point d'abscisse $\dfrac{x}{1+x+x^2}$.
5. **Construction de $\mathscr{C}$**
   Construire $\mathscr{C}$ et Δ. On précisera les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 1, $\frac{1}{3}$ et 3.

B

Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et la condition initiale $u_0 = 1$.

1. **Convergence de (u_n)**

   a. Établir que, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant x$; résoudre l'équation $g(x) = x$.

   b. Prouver que la suite (u_n) est décroissante.

   c. Montrer que (u_n) converge, puis que sa limite a est nulle.

2. **Comportement asymptotique de (u_n)**

   a. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $g\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   b. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,1]$.

   c. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n-1} \leqslant \frac{1}{n}$.

   d. Pour tout entier $p \geqslant 0$, exprimer $\frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p}$ en fonction de u_p.

   Établir que :

   $$1 \leqslant \frac{1}{u_{p+1}} - \frac{1}{u_p} \leqslant 1 + \frac{1}{p+1}.$$

   En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$:

   $$n \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

e. Pour tout entier $p \geqslant 2$, comparer $\frac{1}{p}$ et $\int_{p-1}^{p} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant \ln n.$$

f. Déterminer la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.