Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+ = [0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

1. **a.** Étudier les variations de f. Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

   b. Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

2. On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - x.$$

   a. Résoudre l'équation $e^x - e^{-x} - 2 = 0$ (on pourra poser $X =$

Calculer m ; en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On définit une suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour } n \text{ entier naturel, } u_{n+1} = f(u_n).$$

   a. Montrer que $u_{n+1} - u_n$ peut être minoré par m (calculé en 2. b.), puis que $u_n - u_0 \geqslant n.m$.

   b. En déduire la limite de (u_n).

4. Soit a un réel quelconque.

   a. Discuter *graphiquement*, en utilisant le 1., le nombre de solutions de l'équation $f(x) = a$.

   b. Résoudre, lorsque c'est possible, cette équation.

Partie B

On définit la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

On désigne par Γ la courbe représentative de φ dans le même repère que celui de $(\mathscr{C})$.

1. **a.** Soit x et y deux réels, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$.
Montrer que l'égalité $y = f(x)$ équivaut à l'égalité $x = \varphi(y)$.

b. Soit M de coordonnées $(a\ ;\ b)$ et M' de coordonnées $(b\ ;\ a)$; montrer que M se transforme en M' par la symétrie orthogonale d'axe la droite (D) d'équation $y = x$.

c. En déduire que la courbe Γ est symétrique de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe (D).

d. Tracer la courbe Γ.

2. On pose $\alpha = \varphi(2)$ et on note Δ la partie du plan que délimitent d'une part les droites d'équations $y = 0$ et $y = \alpha$, d'autre part la courbe Γ et la droite (D).

a. Hachurer Δ sur le graphique.

b. En utilisant la symétrie de la question 1. b., calculer l'aire en cm^2 de Δ.