

PROBLÈME**12 points**

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul.

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

Le problème est consacré à l'étude de la famille des fonctions f_n et à celle d'une suite liée à ces fonctions f_n .

On désigne par \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm.

I. Étude des fonctions f_n

1. Soit h_n la fonction définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$h_n(x) = n \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

Étudier le sens de variation de h_n . En utilisant la valeur de $h_n(0)$, déterminer le signe de h_n sur $] - 1 ; +\infty[$.

2. a. Pour tout x appartenant à $] - 1 ; +\infty[$ vérifier que :

$$f'_1(x) = h_1(x),$$

et que pour tout n strictement supérieur à 1,

$$f'_n(x) = x^{n-1} h_n(x).$$

- b. On suppose n impair. Pour tout x appartenant à $] - 1 ; +\infty[$ justifier que $f'_n(x)x$ et $h_n(x)$ sont de même signe.

Dresser alors le tableau de variations de la fonction f_n , lorsque n est impair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

- c. On suppose n pair. Dressez de même le tableau de variations de f_n lorsque n est pair, en précisant ses limites en -1 et $+\infty$.

3. a. Étudier la position relative des courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

- b. Tracer ces deux courbes.

II. Étude d'une suite

Dans cette partie, U désigne la suite de terme général U_n définie pour tout n entier naturel non nul par :

$$U_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx.$$

1. Étude de la convergence

- a. Démontrer que :

$$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}.$$

- b.** En déduire que la suite U est convergente et donner sa limite.
c. À l'aide de l'encadrement obtenu au **a.**, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait :

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{100}.$$

2. Calcul de U_1

- a.** En remarquant que pour tout x appartenant à $[0; 1]$ on a

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

calculer

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx.$$

- b.** Calculer U_1 au moyen d'une intégration par parties.

3. Calcul de U_n

Pour tout x de $[0; 1]$ et pour tout $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n \quad (1)$$

- a.** Démontrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} \quad [2].$$

- b.** En utilisant successivement les expressions (1) et (2) de $S_n(x)$, montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

- c.** En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} \right) \right]$$

4. Application

Soit E l'ensemble des points M du plan, de coordonnées $(x; y)$ vérifiant :

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) \leq y \leq f_1(x).$$

Calculer U_2 et en déduire l'aire de E en cm^2 .