PROBLÈME **11 points**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{\ln x}{x - \ln x} \quad \text{si } x > 0, \\ f(0) & = & -1 \end{array}\right.$$

(ln désigne le logarithme népérien).

On note $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

L'unité graphique est de 2 cm.

Partie A
Étude d'une fonction auxiliaire (pour la partie C)

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln x - 1.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. En déduire que $g(x) \geqslant 0$, pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie B
Étude de f

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.
   Montrer que f est dérivable en 0 : on précisera la valeur de sa dérivée en 0.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
3. Étudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variations.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

Partie C
Étude d'une primitive de f

On pose, pour tout $x \geqslant 0$:

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On ne cherchera pas à calculer $F(x)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction F, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Montrer, en introduisant la fonction g de la partie A, que, pour tout t de de l'intervalle $]0\,;\,1]$, on a :

$$-1 \leqslant f(t) \leqslant t-1.$$

Vérifier que cette double inégalité est encore vraie pour $t=0$.

En déduire que $\frac{1}{2} \leqslant F(0) \leqslant 1$.

3. **a.** Prouver que pour tout $t \geqslant 1$, on a :

$$\frac{\ln t}{t} \leqslant f(t).$$

b. Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4. On note (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

(on pourra utiliser le sens de variation de f).

b. Montrer que la suite (u_n) converge vers zéro.

5. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n-1} u_p = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}.$$

a. Exprimer S_n à l'aide de F.

b. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.