PROBLÈME **4 points**

Les parties B et C sont indépendantes.
Pour les représentations graphiques de ce problème l'unité choisie est 2 cm ; et il convient de placer l'axe des ordonnées suffisamment à gauche de la feuille afin de réserver 16cm pour le demi-axe des abscisses positives.

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln x) \quad \text{si } x > 0, \ \text{ et } f(0) = 0.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Justifier que f est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

3. **a.** Étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b. Étudier les variations de f. Faire un tableau de variations.

4. **a.** Écrire une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse e.

b. Tracer (T) et $(\mathscr{C})$. Préciser la tangente à $(\mathscr{C})$ au point O.

Partie B

1. On désigne par α et x des nombres réels strictement positifs ; calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$, à l'aide d'une intégration par parties.

2. Soit α un nombre réel strictement positif et $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \mathrm{e}$.

a. Montrer que $\mathscr{A}(\alpha) = 4\displaystyle\int_\alpha^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(On distinguera les deux cas $\alpha \leqslant \mathrm{e}$ et $\alpha \geqslant \mathrm{e}$.

Calculer $\mathscr{A}(\alpha)$ en fonction de α.

b. Calculer la limite de $\mathscr{A}(\alpha)$ quand α tend vers 0.

c. Déterminer α tel que : $\alpha \geqslant \mathrm{e}$ et $\mathscr{A}(\alpha) = \mathrm{e}^2$.

3. Soit x un réel de $[0\ ;\ +\infty[$.

Prouver l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que F est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et préciser sa fonction dérivée.

Quelle est la limite de F en 0 ?

5. **a.** Déduire du B 1. que pour $x > 0$:

$$F(x) - F(1) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x) - \frac{3}{4}.$$

b. Calculer la limite de $\dfrac{x^2}{4}(3 - 2\ln x)$ quand x tend vers 0.

En déduire la valeur de $F(1)$. En conclure que si $x > 0$:

$$F(x) = \frac{x^2}{4}(3 - 2\ln x).$$

Partie C

À tout réel k on associe la fonction f_k, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_k(0) = 0, \quad \text{et si} \quad x > 0\ f_k(x) = x(k - \ln x).$$

On appelle $(\mathscr{C}_k)$ la courbe représentative de f_k, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Soit a un réel strictement positif, A_k le point d'abscisse a de $(\mathscr{C}_k)$ et $(\mathscr{T}_k)$ la tangente à $(\mathscr{C}_k)$ au point A_k.

Déterminer l'ordonnée du point d'intersection de $(\mathscr{T}_k)$ avec l'axe des ordonnées.

En déduire que, lorsque k varie dans $\mathbb{R}$, les tangentes $(\mathscr{T}_k)$ sont concourantes en un même point de l'axe $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\jmath}\right)$.

2. **a.** Montrer que l'homothétie de centre O et de rapport e^k transforme la courbe $(\mathscr{C}_0)$ en la courbe $(\mathscr{C}_k)$.

b. Remarquer que la courbe $(\mathscr{C}_1)$ est la courbe $(\mathscr{C})$ tracée au A. 4. b.

Par quelle transformation ponctuelle, la courbe $(\mathscr{C}_0)$ se déduit-elle de $(\mathscr{C}_1)$? Construire $(\mathscr{C}_0)$ sur la même figure que $(\mathscr{C}_1)$ ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et 1.

3. Déduire, dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ le tracé de $(\mathscr{C}_2)$ de celui de $(\mathscr{C}_0)$ sur la même figure que $(\mathscr{C}_0)$ et $(\mathscr{C}_1)$. Construire les tangentes à $(\mathscr{C}_2)$ aux points d'abscisses e, e^e et 1.

Faire apparaître sur le graphique le point d'intersection des tangentes aux courbes $(\mathscr{C}_k)$, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ aux points de ces courbes d'abscisse 1.