PROBLÈME **12 points**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}.$$

On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Partie A

1. **a.** Étudier la fonction f

   b. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f dans un repère orthonormal (unité 4 cm).

2. **a.** Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout x réel.

   b. Montrer par des considérations d'aires relatives à $\mathscr{C}$ que F est une fonction impaire.

   c. Déterminer le sens de variation de F.

   d. Vérifier que pour tout réel t on a :

   $$t^2 \geqslant 2t - 1.$$

   En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}_+$ on a :

   $$F(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

   On admettra que toute fonction croissante et majorée sur $[0\,;\,+\infty[$ admet une limite finie en $+\infty$.
   On pose $\lim\limits_{+\infty} F = \ell$. Quel encadrement peut-on déjà donner de ℓ ?

Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir un encadrement de $F(1)$.

1. k désigne un réel strictement positif. Soit la fonction φ_k définie sur $[0\,;\,1]$ par :

   $$\varphi_k(x) = \mathrm{e}^{-x} - \left(1 - x + kx^2\right)$$

   Calculer φ'_k et φ''_k.

2. **a.** Montrer à l'aide des variations de $\varphi'_{\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$ que $\varphi_{\frac{1}{2}}$ est négative sur $[0\,;\,1]$.

   b. Étudier les variations de $\varphi'_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$;.

   Montrer qu'il existe un réel unique α de $[0\,;\,1]$ tel que $\varphi'_{\frac{1}{\mathrm{e}}}(\alpha) = 0$.

   Montrer alors à l'aide de ses variations que $\varphi_{\frac{1}{\mathrm{e}}}$ est positive sur $[0\,;\,1]$.

   c. En déduire que pour tout x de $[0\,;\,1]$ on a :

   $$1 - x^2 + \frac{x^4}{\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

   et donner un encadrement de $F(1)$.

Partie C

On se propose maintenant de donner une valeur approchée de ℓ.

1. On pose : $\lambda(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{9}{10}(2x+1)$. 10 Déterminer le sens de variation de λ sur $[1\ ;\ +\infty[$. En déduire le signe de λ sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Prouver que pour tout réel $x \geqslant 1$ on a :

$$\frac{9}{10}(2x+1)\mathrm{e}^{-x^2-x} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}.$$

3. **a.** À l'aide de A 2. et C 2. déterminer un encadrement de $f(t)$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ puis un encadrement de $F(x - F(1)$ pour tout x de $[1\ ;\ +\infty[$.

   b. En déduire une valeur approchée de ℓ à $5\cdot 10^{-2}$ près.
4. Donner l'allure de la courbe représentative de F dans un repère orthonormal (unité 4 cm sur chaque axe). On placera la tangente au point d'abscisse 0, les asymptotes et les points d'abscisses 1 et -1.