PROBLÈME **10 points**

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

L'objet du problème est d'étudier :

- dans la partie A, la fonction f_n et sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}_n$ dans un repère orthonormal.
- dans la partie B l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A

Dans cette partie, le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. (Unité graphique : 10 cm.)

1. Montrer que $\mathscr{C}_0$ est un demi-cercle, de rayon $\dfrac{1}{2}$, dont on précisera le centre.

2. Soit $n \geqslant 1$.

a. Calculer $f_n'(x)$ pour $0 < x < 1$ et montrer que $f_n'(x)$ et $\left(n + \dfrac{1}{2}\right) - (n+1)x$ ont même signe.

b. Étudier la dérivabilité de f_n en 0 et 1.

c. Donner le tableau de variations de f.
(On ne demande pas le calcul du maximum de f_n).

3. **a.** Soit $x \in [0 ; 1]$ et $n \geqslant 0$.
Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

b. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.

c. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ dans le même repère.

Partie B

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $g(x) = (1-x)^{\frac{1}{2}}$ et G la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$G(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Vérifier que G est la primitive de g qui s'annule pour $x = 1$.

2. Soit $n > 0$.
   a. En procédant à une intégration par parties utilisant G, démontrer que :

$$I_n = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)(I_{n-1} - I_n).$$

En déduire la relation :

$$[1] \qquad I_n = \frac{2n+1}{2n+4} I_{n-1}.$$

Du résultat obtenu en A.1. déduire la valeur de I_0.

   b. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

$$I_n = \frac{3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times (2n+1)}{6 \times 8 \times 10 \times \ldots \times (2n+4)} \times \frac{\pi}{8}.$$

3. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$.
   a. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.
   Que peut-on en déduire ?
   b. Montrer, à l'aide d'une majoration de $f_n(x)$ sur $[0\,;\,1]$, que :

$$I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$