PROBLÈME **12 points**

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x\mathrm{e}^x - nx.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

A. Soit la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = (1+x)\mathrm{e}^x - n$.

1. Calculer la dérivée de g_n faire le tableau de variation de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n et que α_n est positif ou nul. Que vaut α_1 ?
3. Montrer que $\alpha_n = \ln \dfrac{n}{1+\alpha_n}$ et que $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \ln n$.
4. **a.** Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a $\ln x \leqslant x - 1$ (1).

   b. En utilisant (1), déterminer le signe de $g_n\left(\ln\sqrt{n}\right)$.

   c. En déduire que : $\dfrac{1}{2}\ln n \leqslant \alpha_n$.

   Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\dfrac{\alpha_n}{n}$?

B.

1. Calculer la dérivée de f_n, faire le tableau de variations de f_n et déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.
   Montrer que $f_n(\alpha_n) = \dfrac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.
2. Montrer que $\mathscr{C}_n$ a une asymptote D_n que l'on déterminera. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et D_n.
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}_n$ et de l'axe des abscisses, et préciser la position de $\mathscr{C}_n$ par rapport à cet axe.
4. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{C}_{n+1}$.
5. **a.** Montrer que $0,35 \leqslant \alpha_2 \leqslant 0,40$.
   Déterminer les valeurs décimales approchées à 10^{-2} près, par défaut et par excès, de α_2.
   En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

   b. Tracez $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sur le même graphique en mettant en évidence les résultats précédents (on choisira comme unité 10 cm sur les deux axes). On précisera les tangentes en O à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

   c. Calculer en cm^2 l'aire du domaine borné limité par $\mathscr{C}_2$ et l'axe des abscisses (on pourra utiliser une intégration par parties).