**PROBLÈME** **11 points**

Le but du problème est d'étudier dans sa première partie la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}$ puis, dans sa seconde partie, d'établir un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

## Partie A

**1.** On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x - \mathrm{e}^{x-1}.$$

**a.** Étudier les variations de $g$ (on ne demande pas dans cette question de calculer les limites de $g$).

Calculer $g(1)$ et montrer que, pour tout $x$ réel, $g(x) \leqslant 0$.

**b.** En déduire que pour tout $x$ réel $x\mathrm{e}^{-x} \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, puis $1 - x\mathrm{e}^{-x} > 0$.

**2.** On désigne par $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}.$$

Soit $(C)$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 3 cm).

**a.** Vérifier que $f$ est définie sur $\mathbb{R}$.

**b.** Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

**c.** Étudier les variations de $f$ et dresser le tableau de variations.

**d.** Écrire une équation de la tangente (T) à $(C)$ au point d'abscisse 0.

**e.** Tracer (T), puis $(C)$ (on admettra que $(C)$ est au-dessus de (T) pour $x < 0$, et au-dessous pour $x > 0$).

**3.** **a.** Déterminer les images par $f$ des intervalles $[0\,;\,1]$ et $[1\,;\,+\infty[$.

**b.** En déduire que pour tout $x$ positif ou nul :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$$

## Partie B

**1.** Donner une interprétation géométrique du nombre $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

**2.** Soit $n$ un entier naturel non nul, et soit $J_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

**a.** À l'aide d'une intégration par parties montrer que $J_1 = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

**b.** On se propose de calculer $J_2$ sans utiliser des intégrations par parties ; déterminer les coefficients $a$, $b$ et $c$ tels que la fonction $H(x)$ définie par $H(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{-2x}$ soit une primitive de $h(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.

En déduire $J_2 = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{5}{\mathrm{e}^2}\right)$.

**3.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \ldots + J_n$.

**a.** Montrer que, pour tout réel $x$,

$$1 + x\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-2x} + \cdots + x^n\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1 - \left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^{n+1}}{1 - x\mathrm{e}^{-x}}.$$

**b.** En déduire que $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)x} f(x)\,\mathrm{d}x$.

**c.** En utilisant A 1. b., montrer que pour tout $x$ positif ou nul :

$$0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)x} f(x) \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n(\mathrm{e}-1)}.$$

**d.** En déduire un encadrement de $I - u_n$ ; étudier alors la convergence de la suite de terme général $u_n$.

**4.** Montrer que $u_2 \leqslant I \leqslant u_2 + \frac{1}{\mathrm{e}^2(\mathrm{e}-1)}$.

Sachant que $u_2 = 1 + J_1 + J_2$, trouver deux nombres décimaux $d_1$ et $d_2$ tels que $0 < d_2 - d_1 < 10^{-1}$ et $d_1 < 1 < d_2$.