PROBLÈME **12 points**

PARTIE A

1. On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

   a. Dresser le tableau des variations de g.

   b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique λ telle que $1,89 < \lambda < 1,90$.

   c. Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : =

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

   a. Dresser le tableau des variations de f.

   b. Vérifier que

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\lambda^2}.$$

   En déduire un encadrement de $f(\lambda)$ d'amplitude $2\cdot 10^{-3}$.

   c. Tracer la représentation graphique de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal en adoptant 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 20 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B

On considère la fonction numérique F définie sur $]0\,;\ +\infty[$ par

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que F est dérivable sur $]0\,;\ +\infty[$ et préciser $F'(x)$.
   En déduire le sens de variation de F.

2. **a.** Vérifier que pour $t \geqslant 1$ on a :

$$\frac{\ln t}{(1+t)^2} \leqslant f(t) \leqslant \frac{\ln t}{t^2}.$$

b. Pour $x > 0$ on pose :

$$I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J(x) = \int_1^x \ln t (1+t)^2\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$.
À l'aide d'une intégration par parties et de l'égalité :

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} \text{ pour } t > 0, \text{ calculer } J(x).$$

c. Déduire de ce qui précède que, pour $x > 1$, on a :

$$\ln 2 + \ln \frac{x}{x+1} - \frac{\ln x}{x+1} \leqslant F(x) \leqslant 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

d. On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$.
Sans calculer ℓ, vérifier que, $\ln 2 \leqslant \ell \leqslant 1$.

3. Soit G la fonction numérique définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x).$$

a. Calculer $G'(x)$ pour $x > 0$.

b. Vérifier que pour tout $x > 0$, $G(x) = 0$.

c. Déduire de ce qui précède la limite de F en 0.