PROBLÈME **11 points**

La partie III *du problème peut être traitée indépendamment de la partie* II

On désigne par f_1 la fonction définie sur l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln\left(e^x + 1\right).$$

I. Étude de la fonction f_1

1. **a.** Préciser les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

   b. Étudier les variations de f_1 et construire son tableau de variations.

2. Montrer que, pour tout réel x : $f_1(x) = x + \ln\left(e^{-x} + 1\right)$.
   Déduire de ce qui précède que la courbe (C_1) représentative de la fonction f_1, admet deux droites asymptotes dont la droite (Δ) d'équation : $y = x$. Déterminer la position de (C_1) par rapport à chacune d'elles.

3. Construire la droite (Δ) et la courbe (C_1) dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité : 2 cm).

II. Étude d'une intégrale

On désire déterminer un encadrement de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(t)\,dt$.

À cet effet, on considère la fonction g définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$g(x) = \frac{x^2}{8} + \frac{x}{2} + \ln 2 - f_1(x).$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g' (dérivée de g) sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   En déduire le signe de $g'(x)$.

   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et en déduire le signe de $g(x)$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$: $0 \leqslant g(x) \leqslant 5 \cdot 10^{-3}$.

3. En déduire un encadrement de l'intégrale I.
   Donner pour I une valeur décimale approchée en précisant l'approximation obtenue.

III. Étude géométrique d'une famille de courbes

1. k étant un nombre réel non nul, on désigne par D_k l'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\infty\,;\,+\infty[$ de l'inéquation : $e^x + k > 0$.

   a. Selon k, déterminer D_k (on distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$).
   À tout réel k, on associe la fonction notée f_k définie pour $x \in D_k$ par :

   $$f_k(x) = \ln\left(e^x + k\right).$$

   On désigne par (C_k) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   b. Établir le tableau de variation de f_k pour chacun des cas $k > 0$ et $k < 0$.
   En déduire que pour tout réel non nul k, l'image par f de D_k est D_{-k}.

2. **a.** Montrer que si $k > 0$, alors : pour tout réel x,

   $$f_k(x + \ln k) = f_1(x) + \ln k.$$

   b. En déduire que si $k > 0$, alors la courbe (C_k) représentative de la fonction f_k se déduit de (C_1) par une transformation géométrique simple que l'on justifiera. Construire sans calcul la courbe (C_2) représentative de f_2 dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

3. (Δ) étant la droite d'équation $y = x$, on désigne par S_Δ la symétrie orthogonale d'axe (Δ). On admettra que S_Δ associe à tout point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ le point M' de coordonnées $(y\,;\,x)$ dans le repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

   a. Montrer que, pour tout réel x de D_k et pour tout réel y de $D_{k'}$ le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$ est un point de (C_k) si et seulement si le point M' de coordonnées $(y\,;\,x)$ est un point de (C_{-k}).

   b. Donner une interprétation géométrique de ce résultat.
   Construire sans calcul la courbe (C_{-1}) représentative de f_{-1} dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.