PROBLÈME **12 points**

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} \text{pour } n = 0 : \quad f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \\ \text{pour } n \geqslant 1 : \quad f_n(x) &= \frac{x^{3n}}{\sqrt{1+x^3}} \end{aligned}$$

On désignera par $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ ayant comme unité graphique 4 cm.

Partie A

1. Déterminer les limites de f_0 aux bornes de son ensemble de définition.
   Étudier le sens de variation de f_0 et construire C_0 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   a. f_n' désignant la fonction dérivée de f_n, montrer que :

   $$f_n'(x) = \frac{x^{3n-1}\left[(6n-3)x^3 + 6n\right]}{2\left(1+x^3\right)\left(\sqrt{1+x^3}\right)}.$$

   b. Étudier le sens de variation de f_1 et f_2 puis dresser leur tableau de variations.
   c. Tracer C_1 et C_2 dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

Partie B

Soit (I_n) la suite réelle définie pour tout entier naturel par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a : $f_n(x) \leqslant x^{3n}$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $I_n \leqslant \dfrac{1}{3n-1}$.
3. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

Partie C

1. On partage le segment $[0\,;\,1]$ en dix segments de même longueur 0,1, par les points :

$$a_0 = 0\,;\ a_1 = 0,1\,;\ a_2 = 0,2\,;\ a_3 = 0,3\,;\ldots;\ a_{10} = 1.$$

   a. Montrer que l'on a, pour tout entier naturel i de 0 à 9 :

$$0,1 f_0(a_i) \geqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_0(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0,1 f_0(a_{i+1}).$$

   b. En déduire que : $0,1\sum_0^9 f_0(a_i) \geqslant 0,1\sum_0^9 f_0(a_{i+1})\, I_0 \geqslant 0,1.$

   c. Montrer, à l'aide de la calculatrice, que : $0,93 \geqslant I_0 \geqslant 0,89$.

2. **a.** En écrivant $f_1(x)$ sous la forme :

$$f_1(x) = x\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$$

   montrer en intégrant I_1 par parties que : $5I_1 = 2\sqrt{2} - 2I_0$.
   On remarquera que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$:

$$\sqrt{1+x^3} = \frac{1+x^3}{\sqrt{1+x^3}}.$$

   b. En déduire un encadrement de I_1.

   c. Montrer de même que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$(6n+5)I_{n+1} = 2\sqrt{2} - (6n+2)I_n.$$