PROBLÈME **10 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;\,4[$ par :

$$f(x) = 2\ln\frac{4(x+1)}{4-x}.$$

(ln désigne le logarithme népérien).

Dans la partie A *on étudie la fonction* f *et on calcule l'intégrale* :

$$J = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dans les parties B *et* C *on étudie deux méthodes d'approximation de* J. *La partie* C *est indépendante de la partie* B.

A.

1. Montrer que l'on a pour tout nombre x de l'intervalle $]-1\,;\,4[$:

$$f(x) = 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) + 4\ln 2.$$

   Déterminer les limites de f en -1 et 4 et étudier les variations de f.

2. Tracer la courbe (C) représentative de f dans un repère orthogonal d'unités 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. **a.** Calculer $F(x) = \displaystyle\int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

   b. On considère sur l'intervalle $]-1\,;\,4[$ les fonctions h et H définies par

$$\begin{array}{rcl} h(x) & = & 2\ln(x+1) - 2\ln(4-x) \\ H(x) & = & F(x+1) + F(4-x) \end{array}$$

   Montrer que H est une primitive de h sur $]-1\,;\,4[$.

   c. Calculer la valeur exacte de J.

B. Soit P le polynôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels.

1. Déterminer a, b et c pour que :

$$P(0) = f(0),\ P(1) = f(1) \quad \text{et } P(2) = f(2).$$

2. On prend désormais : $P(x) = (-5\ln 2 + 3\ln 3)x^2 + (11\ln 2 - 5\ln 3)x$.
Calculer $I = \int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Calculer $|J - I|$. Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à 10^{-3} près du quotient : $\dfrac{|J-I|}{J}$.

C.

1. On note (T) la tangente à (C) au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$.
Déterminer une équation de (T) sous la forme $y = t(x)$. Placer (T) sur la figure.

2. On pose $g(x) = f(x) - \dfrac{8}{5}x + \dfrac{12}{5} - 4\ln 2$ pour x appartenant à $]-1\ ;\ 4[$.

a. Étudier le signe de la dérivée de g.

b. Étudier le signe de g. Interpréter géométriquement ce signe.

c. Calculer

$$K = \int_0^2 t(x)\,\mathrm{d}x.$$

Donner une interprétation géométrique de la valeur $|J - K|$.
Donner à l'aide de la calculatrice une valeur décimale approchée à 10^{-3} près du quotient : $\dfrac{|J-K|}{J}$.