4. Le point M étant un point du plan, d'affixe z non réelle, on nomme M_1 son symétrique par rapport à l'axe des réels.

a. Calculer $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de $\overline{z}$.

Exprimer alors l'argument de $\dfrac{z'+1}{z'-1}$ en fonction de l'angle $\left(\overrightarrow{M_1\mathrm{A}}\,,\ \overrightarrow{M_1\mathrm{B}}\right)$.

b. Comparer les angles $\left(\overrightarrow{M_1\mathrm{A}}\,,\ \overrightarrow{M_1\mathrm{B}}\right)$ et $\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}}\,,\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$.

c. Démontrer que M' appartient au cercle circonscrit au triangle AMB.

PROBLÈME **points**

Question préliminaire :

On admet que, pour tout nombre réel x strictement positif : $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ et $\ln x \leqslant x-1$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

En déduire que, pour tout x strictement positif,

$$\mathrm{e}^x - \ln x \geqslant 2. \qquad (1)$$

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$; (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que f est continue en 0.

Étudier la dérivabilité de f en 0.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. $\left(\text{On pourra écrire } f(x) = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\ln x}{x}}\right)$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - \ln x - x\mathrm{e}^x + 1.$$

a. Déterminer la limite de g en 0.

Déterminer la limite de g en $+\infty$ (on pourra mettre e^x en facteur dans l'expression de $g(x)$.

Étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

b. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α. Justifier l'encadrement : $1,23 \leqslant \alpha \leqslant 1,24 \qquad (2)$.

c. Étudier le signe de $g(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

4. a. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.

b. Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^\alpha - \frac{1}{\alpha}}$.

En utilisant l'encadrement (2) du réel α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$. En déduire que 0,38 est une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et préciser ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et α.

Partie B - Étude d'une suite définie par une intégrale

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_n = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(*On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.*)

1. Interpréter géométriquement u_n.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
3. Soit cp la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^x - x\ln x - \ln x.$$

   Calculer $\varphi'(x)$. En utilisant l'inégalité (1) de la partie préliminaire, démontrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi'(x) \geqslant 0$.
   En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $\varphi(x) \geqslant 0$.
4. **a.** En utilisant la question précédente, montrer que, pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) - \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x} \leqslant 0$.
   b. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x\mathrm{e}^{-x}$.
   c. En effectuant une intégration par parties, calculer, en fonction de l'entier naturel non nul n, les deux intégrales suivantes :

$$\int_1^n x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_1^n (1+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

5. **a.** Montrer que la suite (u_n) est majorée.
   b. Montrer que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ sa limite.
   c. Démontrer que $\dfrac{2}{\mathrm{e}} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{3}{\mathrm{e}}$.