$\overline{E}$ sachant que F est réalisé.

2. a. Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait des freins défectueux et un éclairage défectueux.

   b. Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait de bons freins et un éclairage défectueux.

   c. En déduire la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux.

3. Sachant qu'un véhicule contrôlé a un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux ?

4. a. Montrer que la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (c'est-à-dire ait de bons freins et un bon éclairage) est 0,809 6.

   b. Au cours d'un contrôle, les gendarmes ont arrêté 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi ces véhicules, au moins un véhicule qui ne soit pas en bon état ?

PROBLÈME **12 points**

Partie A

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi]$. On considère la suite géométrique u de premier terme $u_0 = \cos\alpha$ et de raison $\sin\alpha$.

1. Exprimer u_n en fonction de n, et déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Soit la suite s de terme général $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
   Exprimer s_n en fonction de n et déterminer la limite de s_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, d'unité 4 cm.

1. Tracer, sans justification, la courbe C_0 représentative de la fonction S_0 définie sur $\left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ par $S_0(x) = \cos x$.
2. Soit S_1 la fonction définie sur $\left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$ par

$$S_1(x) = \cos x + \cos x \sin x.$$

   Calculer la dérivée de S_1 et exprimer $S_1'(x)$ comme fonction de $\sin x$.
   En déduire le signe de $S_1'(x)$ et les variations de S_1 sur $\left[\dfrac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

3. Soit S la fonction définie sur $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ par

$$S(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}.$$

Calculer la dérivée de S ; en déduire les variations de S sur $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

4. Démontrer pour $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ les inégalités

$$S_1(x) \leqslant S(x) \leqslant S_0(x).$$

Tracer les courbes représentatives C_1 de la fonction S_1 et C de la fonction S.

Partie C

Pour tout nombre entier naturel n, on considère la fonction S_n définie sur $[0\ ;\ 2\pi]$ par

$$S_n(x) = \cos x\left(1 + \sin x + \cdots + \sin^n x\right),$$

et on pose

$$I_n = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer I_0, I_1 ainsi que $I = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} S(x)\,\mathrm{d}x$.

Vérifier que $I_1 \leqslant I \leqslant I_0$.

Comment les inégalités peuvent-elles être illustrées graphiquement ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a (-I)n+ 1

$$I_{n+1} - I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}.$$

En déduire que $I_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$.

3. Soit les suites A et B de termes généraux $A_n = I_{2n}$ et $B_n = I_{2n+1}$. Démontrer que :

a. la suite A est décroissante et la suite B est croissante ;

b. la suite de terme général $A_n - B_n$ converge vers 0.

4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x appartenant à $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$ on a :

$S(x) - S_n(x) = (\sin x)^{n+1} S(x)$, puis que :

$$S_{2n+1}(x) \leqslant S(x) \leqslant S_{2n}(x).$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$B_n \leqslant I \leqslant A_n.$$

Démontrer que A et B convergent vers I.