

EXERCICE 2

5 points

Enseignement de spécialité

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \quad \text{et, pour } n \geq 1, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

1. a. Soit f la fonction numérique définie sur $[0; 1]$ par

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Calculer la dérivée f' de f . En déduire u_0 .

- b. Calculer u_1 .

2. a. Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- b. Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ on a :

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \quad (1)$$

Déterminer la limite de (u_n) .

3. Pour tout entier $n \geq 3$, on pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1+x^2} dx$.

- a. Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $nu_n + u_{n-2} = I_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n , montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

- b. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$ on a :

$$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}. \quad (2)$$

- c. À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLÈME

11 points

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentant la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle, puis d'étudier la configuration obtenue.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , unité graphique 1 cm.

On note :

Γ et C les courbes d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = \ln x$;

T_a la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse a , a étant un nombre réel.

D_k est la tangente à la courbe C au point K d'abscisse k , k étant un nombre réel strictement positif.

Partie A

Dans cette partie, on cherche le lien entre des droites, tangentes aux deux courbes Γ et C et qui sont parallèles ; puis à quelle condition une droite tangente à la courbe Γ est également tangente à la courbe C .

1. a. Déterminer une équation cartésienne de la droite T_a .
Déterminer de même une équation cartésienne de la droite D_k .
- b. Déterminer k en fonction de a pour que les droites T_a et D_k soient parallèles.
On notera b la valeur de k ainsi obtenue, B le point de la courbe C d'abscisse b et D_b la tangente correspondante.
2. Montrer que les droites T_a et D_b sont confondues si et seulement si :

$$b = e^{-a} \quad \text{et} \quad (a+1)e^{-a} = a-1.$$

Partie B

Dans cette partie, on se propose d'étudier les solutions de l'équation :

$$(1) \quad e^{-x} = \frac{x-1}{x+1} e^x.$$

Pour cela, on considère la fonction f définie pour tout nombre réel x , $x \neq -1$, par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} e^x$.

1. a. Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $e^{-x} = \frac{x-1}{x+1}$.
- b. Étudier les variations de f sur $I = [0; +\infty[$ et la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
- c. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet, dans I , une solution unique μ , et que μ appartient à l'intervalle $[1,5; 1,6]$.
2. a. Pour tout nombre réel x , différent de 1 et de -1 , calculer le produit $f(x) \times f(-x)$.
- b. Dédire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.
- c. Déterminer les tangentes communes aux courbes Γ et C .
- d. Tracer dans le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes Γ et C . On rappelle que les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.
Tracer également les tangentes communes T_μ et $T_{-\mu}$.
On prendra pour μ la valeur approchée 1,55.

Partie C

Étude géométrique du problème

On considère l'application S du plan dans lui-même qui à tout point M de coordonnées $(x; y)$, y non nul, associe le point M' de coordonnées $(x'; y')$ avec

$$x' = -x \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{y}.$$

1. Déterminer $S(M')$. Montrer que, si le point M appartient à la courbe Γ , alors le point M' appartient aussi à la courbe Γ .
2. Soit A le point d'abscisse μ (μ étant le réel défini à la partie B. 1. c. de la courbe Γ ; T_μ , est donc tangente à la courbe Γ au point A et tangente à la courbe C au point B d'abscisse $e^{-\mu}$.
 - a. Déterminer en fonction de μ les coordonnées de $A' = S(A)$.

- b.** Vérifier que la droite $T_{-\mu}$ est tangente à la courbe Γ au point A' et qu'elle est aussi tangente à la courbe C en un point B_1 , dont on donnera les coordonnées en fonction de μ . Compléter la figure en plaçant les points A , B_1 , A' et B .

- 3. a.** Justifier les coordonnées suivantes :

$$A\left(\mu; \frac{\mu+1}{\mu-1}\right) ; B\left(\frac{\mu-1}{\mu+1}; -\mu\right)$$

$$A'\left(-\mu; \frac{\mu-1}{\mu+1}\right) \text{ et } B_1\left(\frac{\mu+1}{\mu-1}; \mu\right).$$

- b.** En déduire que les droites T_μ et $T_{-\mu}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Déterminer la nature du quadrilatère AB_1BA' .

- 4.** Montrer que l'aire du domaine limité par le segment $[AA']$ et l'arc de la courbe Γ d'extrémités A et A' est égale à 2μ . On admettra que cet arc est situé en dessous du segment $[AA']$.