TS **PROBLEMe 5**

D'après bac S, 1996

L'objectif est de déterminer les droites tangentes à la fois à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien et à celle de la fonction exponentielle. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

On note :

Γ et □ les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln x$;

T_a la tangente à la courbe Γ en son point *A* d'abscisse *a*, *a* étant un nombre réel.

D_λ la tangente à □ en son point *K* d'abscisse λ, λ étant un nombre réel strictement positif.

Les deux parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie A (6 points)

Dans cette partie on recherche des tangentes aux courbes □ et Γ qui sont parallèles ; puis à quelle condition une droite tangente à Γ est également tangente à □.

1) a) Déterminer une équation cartésienne de la droite T_a. Déterminer de même une équation cartésienne de la droite D_λ.
   b) Déterminer λ en fonction de *a* pour que les droites T_a et D_λ soient parallèles.

On notera *b* la valeur de λ ainsi obtenue, *B* le point de la courbe □ d'abscisse *b* et D_b la tangente correspondante.

2) Montrer que les droites T_a et D_b sont confondues si et seulement si :

$$b = e^{-a} \text{ et } (a+1)e^{-a} = a-1$$

Partie B (14 points)

Dans cette partie, on se propose de déterminer les solutions de l'équation : $e^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$ (1).

Pour cela, on considère la fonction *f* définie pour tout *x* différent de –1 par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}e^x$.

1) a) Montrer que $f(x) = 1$ si et seulement si $e^{-x} = \dfrac{x-1}{x+1}$.
   b) Etudier les variations de *f* sur [0 ; +□[et la limite de *f* en +□.
   c) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet dans [0 ; +□[une solution unique μ dont on donnera un encadrement à 10^{-1} près.
2) a) Pour tout nombre réel *x* différent de 1 et –1, calculer le produit $f(x) \times f(-x)$.
   b) Déduire des questions précédentes que l'équation (1) admet deux solutions opposées.
   c) Déterminer les tangentes communes aux courbes □ et Γ.

3) Tracer dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes □ et Γ. On rappelle que ces courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Tracer également les tangentes communes T_μ et $T_{-\mu}$. On prendra pour μ la valeur approchée 1,55.

4) On appelle *A* le point de contact de T_μ et Γ, *B* le point de contact de T_μ et □, *C* le point de contact de $T_{-\mu}$ et Γ, *D* le point de contact de $T_{-\mu}$ et □. Montrer que ces points ont pour coordonnées $A\left(\mu,\dfrac{\mu+1}{\mu-1}\right)$, $B\left(\dfrac{\mu-1}{\mu+1},-\mu\right)$, $C\left(-\mu,\dfrac{\mu-1}{\mu+1}\right)$, $D\left(\dfrac{\mu+1}{\mu-1},\mu\right)$. Démontrer que *ABCD* est un trapèze isocèle.