TS **PROBLEME 3**

Première partie -Étude d'une fonction auxiliaire *g*

Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1).$$

1. Montrer que *g* est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ et, en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2 + 1).$$ (0,75 *point*)

2. Faire l'étude du sens de variation de *g* sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. (0,5 *point*)

3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α, dans l'intervalle $\left[\sqrt{e-1};\sqrt{e^2-1}\right]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale à 10^{-2} près par défaut de α. (0,75 *point*)

4. En déduire le signe de $g(x)$, pour *x* appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. (0,5 *point*)

Deuxième partie - Étude de la fonction *f*

La fonction *f* est définie sur $[0\ ;+\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative (C), dans le plan rapporté à un repère d'origine O, est donnée en *annexe 2* , qui sera complétée et rendue avec la copie.

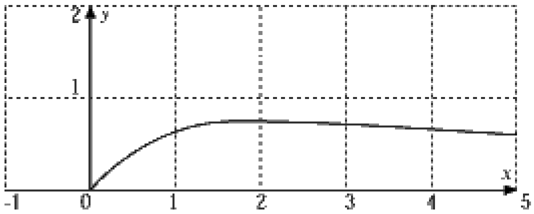
1. *a*) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 1$. (0,5 *point*)

En déduire que *f* est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$. (0,5 *point*)

b) Vérifier que, pour *x* strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$. (0,5 *point*)

Faire l'étude du sens de variation de *f* sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$. (0,5 *point*

Annexe 2



2. *a*) Montrer que, pour $x \geq 1{,}0 \,;\, f(x) \leq \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$. (1 *point*)

b) En déduire la limite de *f* en $+\infty$. (0,5 *point*)

Troisième partie - Étude d'une primitive de ***f***

On note F la primitive de *f* sur l'intervalle [0 ; $+\infty$[, qui s'annule pour *x* = 1.

On rappelle que $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ (on ne cherchera pas à calculer F(*x*)).

1. *a*) Montrer que, pour $x > 0, f(x) \geq \dfrac{2\ln(x)}{x}$. (0,5 *point*)

b) Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{2\ln(t)}{t}\,dt$ pour $x \geq 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$. (1 *point*)

2. Dresser le tableau des variations de F. (0,5 *point*)

3. Montrer que *f* (1) < F(2) < *f* (α) et en déduire un encadrement de F(2).

(On prendra *f* (α) $\approx$ 0,8.) (0,5 *point*)

4. On note I le point de coordonnées (1 ; 0), A le point de (C) de coordonnées (1 ; ln 2) et B le point de coordonnées (ln 2 ; ln 2).

a) Vérifier que B appartient à la tangente à (C) en O. (0,25 *point*)

b) Placer les points I, A et B sur la figure de l'*annexe 1* et tracer les segments [OA], [OB], [BA] et [AI]. (0,25 *point*)

c) On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle [0 ; 1], la courbe (C) est située au-dessus de [OA] et au-dessous de [OB] et de [BA].

Déterminer un encadrement de F(0), d'amplitude inférieure à 2.10^{-1}. (0,5 *point*)

5. Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents ; on précisera notamment la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm)(1 *point*)