PROBLÈME *(10 points)* commun à tous les candidats

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ;

on prendra 2 cm comme unité sur les deux axes et on placera l'axe des abscisses au milieu de la feuille et l'axe des ordonnées sur le bord gauche de la feuille millimétrée.

PARTIE A

ÉTUDE D'UNE FONCTION *f* ET DE SA COURBE REPRÉSENTATIVE *C*

On considère la fonction *f*, définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

et on désigne par *C* sa courbe représentative relativement au repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) Déterminer les limites de *f* en +∞ et 0.

2) Montrer que *f* est dérivable sur]0 ; + ∞[et calculer $f'(x)$.

3) Soit *u* la fonction définie sur]0 ; + ∞[par $u(x) = \ln x + x - 3$.

a) Étudier les variations de *u*.

b) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle [2,3].

Montrer que $2{,}20 < \alpha < 2{,}21$.

c) Étudier le signe de $u(x)$ sur [0 ; + ∞[.

4) a) Étudier les variations de *f*.

b) Exprimer ln α comme polynôme en α.

Montrer que : $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de f(α) d'amplitude 2×10^{-2}.

5) a) Étudier le signe de $f(x)$.

b) Tracer *C*.

PARTIE B

ÉTUDE D'UNE PRIMITIVE DE *f* SUR]0 ; + ∞ [

Soit *F* la primitive de *f* sur]0 ; + ∞ [qui s'annule pour $x = 1$.

On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

1) a) Sans calculer $F(x)$, étudier les variations de *F* sur]0 ; + ∞ [.

b) Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2) Calcul de $F(x)$

a) x étant un réel strictement positif, calculer l'intégrale $\int_1^x \ln t \, dt$

(on pourra faire une intégration par parties).

b) Montrer que, pour tout *x* strictement positif :

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$$

c) En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x.

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} (x \ln x) = 0$.

En déduire la limite de F en 0.

b) Montrer que, pour x strictement supérieur à 1,

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x}\right) + 3$$

En déduire la limite de F en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de F.

d) Tracer Γ sur le même graphique que C.

4) Calcul d'une aire :

Calculer, en cm^2, l'aire du domaine limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.