PROBLEME *(10 points)* commun à tous les candidats

Les tracés de courbes seront faits dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

On rappelle qu'une fonction *f* est majorée par une fonction *g* (ce qui signifie aussi que *g* est minorée par *f*) sur un intervalle I si et seulement si, pour tout *x* appartenant à I, $f(x) \leq g(x)$.

Partie A

Soit *f* et *g* les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(1+x) \text{ et } g(x) = \frac{2x}{x+2} \ ;$$

on notera C la représentation graphique de *f* et Γ celle de *g*.

On se propose de démontrer que *f* est minorée par *g* sur $[0; +\infty[$.

Soit h la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1) Étudier le sens de variation de *h* sur $[0; +\infty[$; calculer $h(0)$. (L'étude de la limite de *h* en $+\infty$ n'est pas demandée.)

2) En déduire que pour tout réel *x* positif ou nul,

$$(1) \qquad \frac{2x}{x+2} \leq \ln(1+x)$$

3) Construire dans le même repère les courbes C et Γ et montrer qu'elles admettent en O une même tangente D que l'on tracera. (On justifiera rapidement le tracé de ces courbes).

PARTIE B

k désignant un réel strictement positif, on se propose de déterminer toutes les fonctions linéaires $x \to kx$, majorant la fonction $f : x \to \ln(1+x)$ sur $[0;+\infty[$.

Soit f_k la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

1) Étudier le sens de variation de f_1 définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = \ln(1+x) - x.$$

2) Étudier la limite de f_1 en $+\infty$ et donner la valeur de f_1 en 0.

3) Montrer que pour tout réel x positif ou nul :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

4) En déduire que si $k \geq 1$, alors :pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.

5) Le réel k vérifie les conditions : $0 < k < 1$.

Montrer que la dérivée de f_k s'annule pour $x = \frac{1-k}{k}$ et étudier le sens de variation de f_k .

(L'étude de la limite de f_k en $+\infty$ n'est pas demandée.)

6) En déduire les valeurs de k strictement positives telles que :

pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq kx$.

PARTIE C

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer :

$$I = \int_0^1 \ln(1+x)dx$$

(On remarquera éventuellement que : $\frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$).

En déduire le calcul de J = $\int_0^1 (x - \ln(1+x))dx$

puis de K = $\int_0^1 (\ln(1+x) - \frac{2x}{x+2})dx$

(Pour le calcul de K on pourra vérifier que : $\frac{2x}{x+2} = 2 - \frac{4}{2+x}$).

Interprétez géométriquement les valeurs des intégrales J et K en utilisant les courbes C, Γ et la droite D obtenues dans la partie A.

2) Soit *u* la fonction définie sur [0;1] de la façon suivante :

u(0) = 1 et si $x \neq 0$, $u(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

a. Démontrer que la fonction *u* est continue sur [0;1].

b. On pose :

$$\int_0^1 u(x)dx$$

En utilisant les inégalités (1) et (2) obtenues dans les parties A et B, montrer que :

$$\int_0^1 \frac{2}{x+2}dx \leq L \leq 1$$

En déduire une valeur approchée de L à 10^{-1} près.