On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.

À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :

soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;

soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.

- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :

soit en C, soit en A de façon équiprobable

- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).

On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n , (respectivement B_n, C_n).

On a donc : $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$. Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel $n, a_n + b_n + c_n = 1$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3}a_n \end{cases}$$

- b. Montrer que, pour tout entier naturel $n, a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.

- c. En déduire que, pour tout entier naturel $p,$

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et } b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?