TS **PROBABILITE** feuille 36

EXERCICE 1 *(4 points)* commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'événement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».

a) Montrer que la probabilité p(A) de l'événement A peut s'écrire :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$$

(0,5 point)

b) Déterminer la limite de p(A) lorsque n tend vers $+\infty$. (0,5 point)

2. On considère l'événement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».

Vérifier que la probabilité p(B) de l'événement B peut s'écrire

$$p(\mathrm{B}) = \frac{6}{4(n+3)}$$

(0,5 point)

3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.

– Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;

– Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;

– Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10.

(0,5 point)

Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).

b) Déterminer la loi de probabilité de X. (1 point)

c) Calculer l'espérance mathématique de X. (0,5 point)

d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.